

## **SULLA SESTA DISTORSIONE ELEMENTARE DI VOLTERRA PER UN CILINDRO CAVO OMOGENEO E ISOTROPO DI ALTEZZA FINITA CON CARICO ALLA SAINT VENANT**

IVANA BOCHICCHIO, <sup>[a]</sup> ETTORE LASERRA, <sup>[a]\*</sup> AND MASSIMO PECORARO <sup>[b]</sup>

(Nota presentata dal Socio Ordinario Vincenzo Ciancio)

**ABSTRACT.** In this work we consider the sixth elementary Volterra's distortion for a circular hollow, homogeneous, elastic, isotropic cylinder, to analyze the load acting on the bases as a Saint Venant characteristic external stress. In this way we are able to prove that the specific load connected to the sixth distortion and examined as external stress, is equivalent (in Saint Venant's theory) to a right combined compressive and bending stress (or to a right combined tensile and bending stress).

### **1. Introduzione**

La teoria delle distorsioni elastiche di Volterra impone una profonda revisione allo studio della teoria dell'elasticità nei domini a connessione multipla: i teoremi di unicità della soluzione possono venir meno nei problemi di equilibrio con forze ovunque assegnate, quando nella struttura analitica della soluzione compaiono termini di polidromia [1, 2]. <sup>1</sup>

Come è noto [1], la più generale distorsione elastica capace di indurre uno stato di equilibrio spontaneo, <sup>2</sup> in un cilindro cavo omogeneo e isotropo <sup>3</sup> di altezza finita, può essere costruita tramite sei distorsioni elementari.

Per ciascuna di esse Volterra [1] ha cercato di determinare un campo di spostamenti, soddisfacente le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico nei punti interni e capace di portare il cilindro stesso in una configurazione di equilibrio spontaneo.

In realtà Volterra è riuscito a determinare solo un campo di spostamenti tale da far assumere al cilindro una configurazione di equilibrio con un carico specifico non nullo, ma globalmente equivalente a zero, tale da costringere le basi, a deformazione avvenuta,

---

<sup>1</sup> Tali termini risultano fisicamente ammissibili solo nel caso di domini molteplici connessi. Infatti nel caso di domini semplicemente connessi i termini di polidromia, non avendo significato fisico, vanno scartati per ripristinare l'unicità della soluzione, mentre, nel caso di domini a connessione multipla, i termini singolari di polidromia non possono essere scartati, per cui al fine di stabilire un teorema di unicità non basta assegnare le forze esterne ma occorre conoscere anche le proprietà di polidromia fisicamente ammissibili in relazione al fenomeno in esame [2].

<sup>2</sup> Cioè uno stato di equilibrio caratterizzato da uno stato di tensione e di deformazione in assenza di carico esterno.

<sup>3</sup> Recentemente è stata proposta un'estensione della teoria al caso di un cilindro omogeneo *trasversalmente* isotropo [3, 4, 5].

a rimanere piane e alla stessa distanza  $d$  (altezza del cilindro). Col presente lavoro, prendendo in esame il carico indotto localmente dalla sesta distorsione elementare su un opportuno concio del cilindro cavo omogeneo, isotropo e linearmente elastico di altezza finita, <sup>4</sup> si mette in evidenza, con modello alla Saint Venant, che il carico specifico può essere sostituito con un altro staticamente equivalente, senza conseguenze sulla effettiva distribuzione dello stress e dello strain in tutti i punti del concio, se non in una zona limitata alle immediate vicinanze delle sue basi. È quindi possibile caratterizzare il carico specifico alla Saint Venant attraverso la caratteristica della sollecitazione esterna equivalente, risultando superfluo definire la sua effettiva distribuzione puntuale agente sulle basi del concio.

Si è così ricavato esplicitamente che il carico specifico connesso alla sesta distorsione di Volterra, riguardato come caratteristica di sollecitazione esterna, è equivalente ad una presso o tenso-flessione retta, <sup>5</sup> con centro di sollecitazione nella zona cava del cilindro, quale composizione di due delle sei caratteristiche elementari della sollecitazione esterna (flessione retta più sforzo normale), rispettivamente se la caratteristica  $r$  della distorsione è negativa (rotazione oraria rigida delle facce del taglio intorno all'asse del cilindro) o se la caratteristica  $r$  della distorsione è positiva (rotazione antioraria rigida delle facce del taglio intorno all'asse del cilindro). <sup>6</sup> Questi risultati possono servire ad analizzare il comportamento meccanico di sistemi pluriconnessi di interesse fisico, come ad esempio le lamelle osteoniche in biomeccanica. <sup>7</sup>

## 2. Preliminari

**2.1. Distorsioni di Volterra nel caso di un cilindro cavo.** Richiamiamo dapprima brevemente la teoria generale delle distorsioni di Volterra, <sup>8</sup> con riferimento a un solido cilindrico cavo, di altezza finita  $d$  e configurazione di riferimento  $C$ . Tale solido è rappresentato in figura 1 insieme ad una sua sezione retta passante per un suo generico punto  $P$ . Come usuale consideriamo una terna di riferimento trirettangola levogira  $(O, x_1, x_2, x_3)$  di versori  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  e indichiamo con  $\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e  $\theta(\mathbf{x}) =$

<sup>4</sup> Ricordiamo che il Saint Venant considera un solido prismatico omogeneo e isotropo, *semplicemente* connesso e linearmente elastico, con carico agente solo sulle basi.

<sup>5</sup> Cioè il piano di sollecitazione coincide con quello di flessione.

<sup>6</sup> Le figure riportate nel seguito si riferiranno sempre al caso  $r < 0$ .

<sup>7</sup> Il tessuto osseo è composto di parecchi strati concentrici di osteoni; gli osteoni sono sistemi costituiti di sottili lamelle cilindriche stratificate. Una volta isolata da un osteone umano, una lamella osteonica si deforma spontaneamente e tale deformazione evidenzia uno stress preesistente [6, 7, 8, 9]. Siccome le lamelle osteoniche hanno, approssimativamente, la forma di cilindri cavi, si è pensato di analizzarle dal punto di vista delle distorsioni di Volterra [10].

<sup>8</sup> Volterra formulò una teoria matematica delle distorsioni elastiche, basandosi sulla seguente osservazione di Weingarten [11]: un corpo elastico molteplicemente connesso può essere sede di uno stato tensionale anche in assenza di forze esterne. Basta infatti pensare ad un anello che, reso semplicemente connesso con un taglio trasversale, viene poi ricondotto al suo primitivo grado di molteplicità rinsaldando le facce del taglio, dopo averne asportato un sottile strato di materia. Volterra inizialmente volle stabilire una chiara distinzione tra quelle che chiamò *distorsioni di Weingarten*, in cui è richiesta la continuità delle componenti del tensore degli sforzi che si determinano dopo aver ristabilito nel corpo la continuità materiale, e le *distorsioni di Volterra*, dove si richiedono invece le condizioni, analiticamente più restrittive, di continuità delle componenti del tensore degli sforzi e delle loro derivate prime e seconde.

$\arctg \frac{x_2}{x_1}$  rispettivamente la distanza polare e l'anomalia, computata positivamente in senso antiorario a partire dal semiasse positivo  $x_1$ , nel sistema di coordinate cilindriche  $(O, \rho, \theta, x_3)$  naturalmente associato al cilindro stesso.

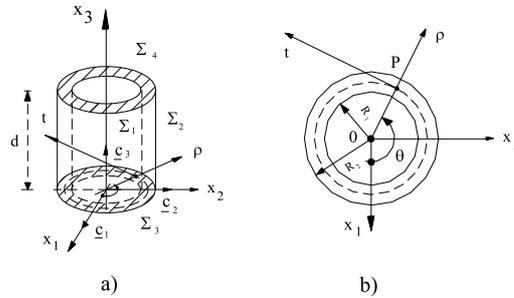


FIGURA 1. Il cilindro cavo nello stato naturale e una sua sezione retta.

Siano  $\Sigma$  la frontiera di  $C$  e  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) le sue parti componenti; precisamente  $\Sigma_1$  è la frontiera interna di raggio  $R_1$ ,  $\Sigma_2$  la frontiera esterna di raggio  $R_2$ ,  $\Sigma_3$  la superficie della base inferiore (a quota  $x_3 = 0$ ) e infine  $\Sigma_4$  la superficie della base superiore (a quota  $x_3 = d$ ).

Consideriamo ora il vettore spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , soluzione del problema di equilibrio elastico per un corpo soggetto ad assegnate forze esterne, in assenza di vincoli esterni e forze di massa; supponiamo che  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  contenga un termine di polidromia legato alla funzione  $\theta(\mathbf{x})$  (fisicamente significativo per una regione di spazio doppiamente connessa qual è il caso di un corpo a simmetria cilindrica cava).<sup>9</sup>

Lo stesso Volterra [1] fornisce una interpretazione fisica della polidromia di cui gode il vettore  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  per effetto di  $\theta(\mathbf{x})$ . Infatti, se si rende semplicemente connessa la regione  $C$  mediante un taglio con un semipiano avente per spigolo l'asse  $Ox_3$ , o addirittura con lo stesso semipiano  $Ox_1x_3$ , per  $x_1 \geq 0$ , il vettore  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , nel dominio semplicemente connesso così ottenuto, potrà essere caratterizzato solo da una discontinuità di prima specie attraverso il semipiano del taglio. Se, successivamente, si impone a una delle due facce del taglio uno spostamento rigido rispetto all'altra, con l'applicazione, a temperatura costante, di un sistema di forze esterne, si determina nel solido uno stato di deformazione e quindi uno stress dovuto al termine di polidromia contenente  $\theta(\mathbf{x})$ , ove  $x_3$  è l'asse di polidromia. Affinché il corpo permanga in uno stato di equilibrio *spontaneo* nella configurazione deformata, e quindi con stress interno non nullo, in assenza di forze esterne e di massa, basta, dopo aver sconnesso il corpo con il taglio, ripristinarne la continuità rinsaldando i lembi del taglio.<sup>10</sup>

In tal modo si è indotta nel corpo moltiplicemente connesso una distorsione, ove il

<sup>9</sup>  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  può contenere anche un eventuale altro termine con punti di singolarità appartenenti ad un luogo geometrico che non intersechi il dominio  $C$ .

<sup>10</sup> Introducendo fra le facce un sottile strato di materia (se le facce sono state rigidamente allontanate) oppure sopprimendo un sottile stato di materia (se l'avvicinamento rigido delle facce del taglio determina sovrapposizione di materia).

termine di polidromia presente nell'espressione del vettore spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  assume un ben preciso significato fisico, nell'ambito di deformazione e stress di tipo regolare [1].

Poiché una distorsione porta il corpo in uno stato di equilibrio senza forze esterne, allora è sensato prevedere, come lo stesso Volterra dimostra, che a seguito della distorsione si determinano nel corpo zone tese e zone compresse distribuite in modo tale che il suo volume a deformazione avvenuta rimanga costante [1].

Siccome lo spostamento rigido di una faccia del taglio rispetto all'altra può essere ottenuta sovrapponendo in generale ad una traslazione rigida una rotazione rigida, allora una distorsione può essere descritta da sei parametri costanti  $l, m, n, p, q, r$ , detti *coefficienti caratteristici della distorsione* corrispondenti alle tre componenti di traslazione e alle tre componenti di rotazione rigida delle facce del taglio rispetto agli assi  $x_1, x_2, x_3$  del riferimento.

*Distorsioni elementari di Volterra.* Si definisce distorsione elementare quella distorsione che corrisponde all'essere diversa da zero una sola delle sei caratteristiche della distorsione [1, 2, 12].<sup>11</sup>

Pertanto, in base a quanto osservato, le operazioni fisiche necessarie per realizzare una qualsiasi delle sei distorsioni elementari possono essere di due tipi. In particolare, per realizzare la 6<sup>a</sup> distorsione elementare, cioè quella relativa al coefficiente caratteristico  $r$ , basta tagliare il cilindro con un piano assiale, ad esempio  $Ox_1x_3$ ,<sup>12</sup> e far ruotare intorno all'asse  $x_3$  la faccia del taglio che guarda verso il semipiano  $x_2 < 0$ , aggiungendo (per  $r > 0$ ) o sopprimendo (per  $r < 0$ ) un sottile cuneo di materia, per poi rinsaldare i lembi.<sup>13</sup>

### 3. Analisi del carico come caratteristica della sollecitazione esterna

Con riferimento alla soluzione dell'equilibrio elastico proposta dal Saint Venant per un solido prismatico isotropo ed omogeneo linearmente elastico con carico agente solo sulle basi, è possibile sostituire il carico specifico con un altro staticamente equivalente<sup>14</sup> senza avere conseguenze sulla effettiva distribuzione dello stress e strain in tutti i punti del corpo se non in una zona limitata alle immediate vicinanze delle basi [13, note p. 56].<sup>15</sup> Ogni soluzione del problema dell'equilibrio elastico è allora da considerarsi come soluzione di tutta una infinità di casi, relativi ad infiniti schemi di carico agenti sulle basi, distribuiti tutti con leggi diverse, ma aventi tutti la stessa risultante. Tale risultante può essere ridotta, come è noto dalla statica, in una forza passante per un punto della sezione di base più una coppia di momento pari a quello della risultante rispetto al punto considerato. Sia la forza che la coppia possono decomporsi in generale secondo i tre assi di riferimento ottenendo quelle che si chiamano *caratteristiche della sollecitazione esterna* in numero di sei.

<sup>11</sup> Analogamente lo spostamento indotto da una distorsione elementare corrisponde a uno solo dei coefficienti  $l, m, n, p, q, r$  diverso da zero.

<sup>12</sup> È inessenziale l'aver supposto che il piano del taglio, scelto per determinare la 6<sup>a</sup> distorsione, coincida con il piano coordinato  $Ox_1x_3$  in quanto la distorsione è caratterizzata unicamente dal valore assunto dalla caratteristica  $r$  ma non dal particolare semipiano scelto avente come bordo l'asse  $Ox_3$ .

<sup>13</sup> Ovviamente la rotazione avviene in senso antiorario per  $r > 0$  o in senso orario per  $r < 0$ .

<sup>14</sup> Avente cioè lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto a ogni polo.

<sup>15</sup> La profondità di tale zona, pari all'incirca alle dimensioni della base, al di là della quale lo schema dei carichi agente sulle basi interviene solo con la sua risultante, è detta *distanza di estinzione*.

Ogni sistema di carichi esterni sulle basi del solido può quindi essere definito attraverso le sole sei caratteristiche della sollecitazione esterna, risultando superfluo definire la effettiva distribuzione puntuale di tali carichi sulle basi. Il vantaggio conseguente a tale impostazione risulta evidente quando si considera che in tal modo è possibile risolvere il caso più generale attraverso una combinazione lineare di sei casi elementari (sforzo normale, taglio lungo  $x_2$ , taglio lungo  $x_1$ ,<sup>16</sup> flessione intorno a  $x_1$ , flessione intorno a  $x_2$ , torsione).

Consideriamo ora la sola 6<sup>a</sup> distorsione elementare, cioè quella di caratteristica  $r$ .<sup>17</sup>

**3.1. Analisi di Volterra del carico agente sulle basi del cilindro cavo.** Volterra, dopo aver esaminato, da un punto di vista puramente qualitativo, le distorsioni elastiche, affronta e risolve parzialmente, nella sua Memoria [1], il problema da un punto di vista rigorosamente matematico, ponendo l'attenzione su un cilindro doppiamente connesso<sup>18</sup> linearmente elastico, isotropo ed omogeneo di altezza finita  $d$ .

Per evidenti ragioni di simmetria conviene riferirsi ad una terna di coordinate cilindriche, pertanto indicheremo con  $(P, \rho^*, t^*, x_3^*)$  il riferimento trirettangolo levogiro che si ottiene traslando in  $P$  gli assi  $\rho, t$  e  $x_3$ , come in figura 2.

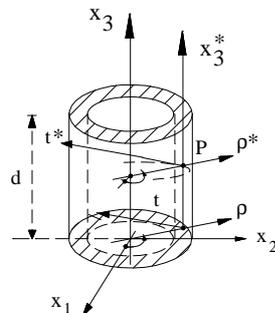


FIGURA 2. Il cilindro cavo riferito al sistema cartesiano e a quello cilindrico.

Volterra determinò le seguenti espressioni in coordinate cilindriche delle componenti di un possibile vettore spostamento  $\mathbf{u}(P)$  relativo alla 6<sup>a</sup> distorsione elementare [1, 12, 14, 15],

<sup>16</sup> Invero il taglio lungo  $x_1$  è sempre associato ad una flessione intorno ad  $x_2$  e torsione, come pure il taglio lungo  $x_2$  è sempre associato ad una flessione intorno ad  $x_1$  e torsione, e ciò al fine di ottenere che tutti i sei casi godano della proprietà dell' *ortogonalità*: cioè sia sempre nulla l'energia mutua di deformazione per ogni possibile combinazione dei sei casi.

<sup>17</sup> Caratterizzata quindi dalla rotazione rigida di una faccia del taglio rispetto all'altra intorno all'asse di simmetria  $x_3$  del cilindro, con introduzione o asportazione di un piccolo cono di materia a seconda che  $r$  sia maggiore di zero (rotazione antioraria) o minore di zero (rotazione oraria).

<sup>18</sup> Un maggior ordine di connessione si limiterebbe a comportare problemi analitici più complessi, con conseguenti complicazioni algoritmiche, senza aggiungere nulla all'interesse concettuale della teoria [1].

per un carico agente sulle sole basi:

$$(1) \quad \begin{cases} u_{\rho^*}(\rho, \theta, x_3) = -\frac{r}{2\pi} \rho \left[ \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left( \log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_2^2 - \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right] \\ u_{t^*}(\rho, \theta, x_3) = \frac{r}{2\pi} \rho \theta \\ u_{x_3^*}(\rho, \theta, x_3) = 0 \end{cases}$$

ove  $\mu$  e  $\lambda$  sono rispettivamente la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> costante di Lamé di un corpo isotropo, omogeneo e linearmente elastico.

Tale spostamento, oltre ad interpretare in maniera fisicamente corretta la polidromia della distorsione, soddisfa col termine  $\log \rho^2$ , presente nella prima delle (1), anche le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico.<sup>19</sup>

Il vettore  $\mathbf{u}(P)$ , rappresentato dalle (1) genera sulle basi  $\sum_3$  e  $\sum_4$  un carico specifico non nullo aventi le seguenti componenti nel riferimento cilindrico  $(O, \rho, \theta, x_3)$ <sup>20</sup> [1, 12, 14]

$$\begin{cases} f_\rho(\rho, 0) = 0 \\ f_t(\rho, 0) = 0 \\ f_{x_3}(\rho, 0) = \frac{r}{2\pi} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left( 1 + \log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \end{cases}$$

e

$$(2) \quad \begin{cases} f_\rho(\rho, d) = 0 \\ f_t(\rho, d) = 0 \\ f_{x_3}(\rho, d) = -\frac{r}{2\pi} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left( 1 + \log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right). \end{cases}$$

Lo studio di Volterra non va oltre la determinazione dello schema puntuale del carico agente sulle basi del cilindro cavo.

**3.2. Analisi alla Saint Venant del carico.** Vogliamo ora procedere all'analisi del carico utilizzando il metodo di Saint Venant.

D'ora in poi, si prenderà in considerazione la sola componente verticale del carico, cioè  $f_{x_3}(\rho, d)$  agente sulla base  $x_3 = d$ ,<sup>21</sup> che si denoterà semplicemente  $f(\rho)$ , in quanto, alla quota fissata, essa risulta funzione solo di  $\rho$ .

Siccome  $f(\rho)$  risulta monotona nell'intervallo  $[R_1, R_2]$ , l'equazione  $f(\rho) = 0$  ammette nell'intervallo  $(R_1, R_2)$  la sola radice reale

$$(3) \quad \rho_n = \sqrt[e]{\frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - 1}.$$

<sup>19</sup> In particolare, il termine  $\log \rho^2$  ammette una singolarità che descrive l'asse di simmetria  $x_3$ , senza mai intersecare il dominio occupato dal cilindro cavo.

<sup>20</sup> Le componenti del carico specifico sono indipendenti da  $\theta$ .

<sup>21</sup> Per l'equilibrio la componente verticale del carico agente sulla base inferiore,  $x_3 = 0$ , sarà direttamente opposta.

In altre parole,  $\rho_n$  è il valore del raggio della superficie cilindrica neutra del corpo cavo rispetto al carico.

Osserviamo che in ogni sezione assiale del cilindro deve risultare  $R_1 < \rho_n < R_2$ , in quanto il cilindro cavo si deformerà per effetto del carico con fibre sia tese che compresse per conservare il suo volume primitivo.

Si può dimostrare [1, p. 435] che  $\rho_n$  verifica la seguente limitazione (vedi figura 3) <sup>22</sup>

$$(4) \quad \rho_M < \rho_n < R_2$$

dove

$$R_M = \rho_M = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Nel seguito supporremo il cilindro cavo sottile, cioè tale che lo spessore  $\Delta \rho = R_2 - R_1$  del

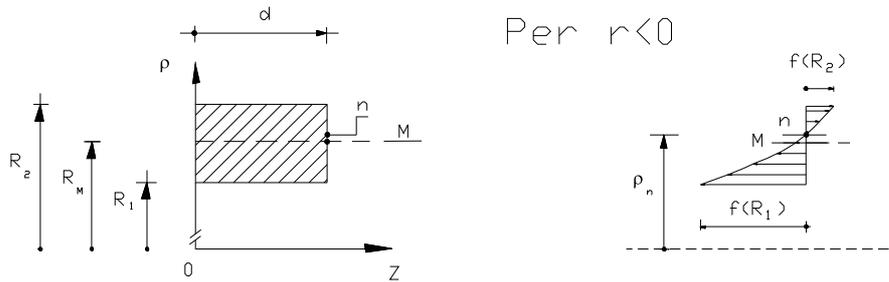


FIGURA 3. Distribuzione del carico specifico.

cilindro sia abbastanza piccolo rispetto al raggio  $R_1$ , come accade nel caso delle lamelle osteoniche.

Consideriamo ora una trave rettangolare ausiliaria, semplicemente connessa di altezza pari all'altezza  $d$  del cilindro, con sezione retta avente base sufficientemente piccola (per comodità unitaria), con spessore pari allo spessore  $\Delta \rho = R_2 - R_1$  del cilindro e soggetta al carico equivalente  $f(\rho)$  sulla base. <sup>23</sup>

È facile verificare che, in conseguenza della (4), e con riferimento alla trave ausiliaria, risulta

$$\left| \int_{R_1}^{\rho_n} f(\rho) d\rho \right| > \left| \int_{\rho_n}^{R_2} f(\rho) d\rho \right|$$

cioè, in modulo, l'area racchiusa da  $f(\rho)$  su  $[R_1, \rho_n]$  è maggiore di quella che essa racchiude su  $[\rho_n, R_2]$ .

<sup>22</sup> In realtà in tale dimostrazione Volterra non ricava la soluzione esatta (3), ma si limita a determinarne delle espressioni approssimate.

<sup>23</sup> Se consideriamo un concio di altezza pari all'altezza  $d$  del cilindro, di spessore  $\Delta \rho = R_2 - R_1$  e apertura  $\Delta \theta$  sufficientemente piccoli, tale concio sarà assimilabile, con buona approssimazione, alla trave ausiliaria e la densità lineare di carico differirà poco da  $f(\rho)$ .

Indichiamo con  $\rho_{n_T}$  il valore di  $\rho$  in cui bisogna traslare il diagramma di  $f(\rho)$  per ottenere che le due aree risultino uguali in modulo e determiniamolo risolvendo l'equazione

$$\int_{R_1}^{\rho_{n_T}} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho + \int_{\rho_{n_T}}^{R_2} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho = 0,$$

che fornisce

$$\rho_{n_T} = \sqrt{e \frac{R_2 \log R_2^2 - R_1 \log R_1^2 - 2}{R_2 - R_1}}.$$

Pertanto, il carico agente sulla sezione si potrà rappresentare come sovrapposizione di uno sforzo normale  $\mathbf{N}$ , applicato nel baricentro  $M$  della sezione, pari a

$$N = f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1)$$

e di una coppia  $\mathbf{C}$  il cui centro  $D$  non coincide col punto  $M$ .

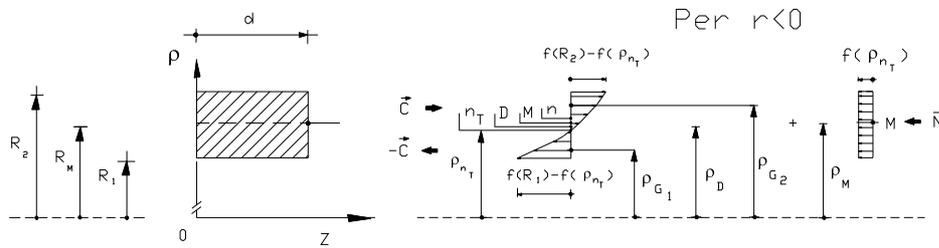


FIGURA 4. Scomposizione del carico specifico.

Per determinare il valore della coppia, il braccio e la coordinata del suo centro  $D$ , si premette il calcolo di  $\rho_{G_1}$  e  $\rho_{G_2}$ , valori di  $\rho$  corrispondenti ai baricentri  $G_1$  e  $G_2$  delle figure rappresentative delle due aree.

Sfruttando la tecnica dei momenti statici si ottiene per  $\rho_{G_1}$  il seguente valore

$$\rho_{G_1} = \frac{1}{2} \left[ R_1 + \frac{(\rho_{n_T} - R_1)^2}{2(\rho_{n_T} - R_1) - R_1(\log \rho_{n_T}^2 - \log R_1^2)} \right],$$

ottenuto dalla formula

$$\rho_{G_1} = \frac{\int_{R_1}^{\rho_{n_T}} \rho [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho}{\int_{R_1}^{\rho_{n_T}} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho};$$

mentre  $\rho_{G_2}$  vale

$$\rho_{G_2} = \frac{1}{2} \left[ R_2 + \frac{(R_2 - \rho_{n_T})^2}{2(R_2 - \rho_{n_T}) - R_2(\log R_2^2 - \log \rho_{n_T}^2)} \right]$$

come dedotto dall' analoga formula

$$\rho_{G_2} = \frac{\int_{\rho_{n_T}}^{R_2} \rho [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho}{\int_{\rho_{n_T}}^{R_2} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho} .$$

Con riferimento all'area

$$\int_{\rho_{n_T}}^{R_2} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho$$

si valuta la coppia col proprio segno<sup>24</sup>

$$C = -\frac{r}{2\pi} \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} [2(R_2 - \rho_{n_T}) - R_2(\log R_2^2 - \log \rho_{n_T}^2)] .$$

Siccome il braccio della coppia vale a sua volta

$$b = \frac{1}{2} [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})] ,$$

il valore del momento risulta pari a

$$M_D = b C = \frac{1}{2} C [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})]$$

essendo

$$(5) \quad \rho_D = \frac{1}{4} [(R_2 - \rho_{G_2}) + (R_1 + \rho_{G_1})]$$

la coordinata del centro  $D$ .

Dalla (5) risulta immediatamente (vedi anche figura 4)

$$\rho_D < \rho_M .$$

Orbene, per ottenere il carico globalmente agente nella sezione (sforzo normale + momento della coppia applicati entrambi nello stesso punto, cioè nel centro  $D$  della coppia), bisogna traslare  $\mathbf{N}$  in  $D$  aggiungendo il momento di trasporto.

Per fare ciò bisogna calcolare la distanza tra  $D$  ed  $M$ . Tale distanza, computata positivamente, vale

$$\rho_M - \rho_D = \frac{1}{4} [(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)] .$$

Pertanto, il momento di trasporto  $M'_D$  vale a sua volta

$$M'_D = \frac{1}{4} f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1) [(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)] .$$

Tale momento di trasporto sarà sempre opposto in segno a quello  $M_D$  per effetto del segno di  $\mathbf{N}$  e della limitazione  $\rho_D < \rho_M$ .

Il momento totale agente applicato in  $D$  vale

$$M''_D = M_D + M'_D = \frac{1}{2} C [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_2})] + \frac{1}{4} f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1) [(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)] .$$

<sup>24</sup>Si ricordi che se la caratteristica  $r$  della distorsione è negativa si effettua una rotazione oraria, antioraria nel caso contrario.

Noto  $M_D''$ , che è sempre minore di  $M_D$  e del suo stesso segno, è possibile calcolare l'eccentricità dello sforzo normale  $\mathbf{N}$  rispetto al punto  $D$ .

Tale eccentricità, calcolata rispetto a  $D$ , individua la posizione del centro di sollecitazione  $C_s$ , che è quel particolare punto appartenente al piano meridiano (che è anche piano di sollecitazione) in cui è possibile far agire da solo lo sforzo normale per ottenere lo stesso effetto prodotto dal carico specifico presente su entrambe le basi di estremità della sezione retta della trave ausiliaria. Essa vale

$$e_{C_s} = \frac{M_D''}{N} = \frac{1}{4} \left[ (R_2 + \rho_{G_2}) - (\rho_{G_1} - R_1) + \frac{2C}{f(\rho_{n_T})} \frac{(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})}{R_2 - R_1} \right].$$

Il segno di  $e_{C_s}$  è computato positivamente nel senso delle  $\rho$  crescenti.

In particolare, siccome  $\rho_M < \rho_n < R_2$ , accade sempre che  $C_s$  non appartiene alla sezione retta della trave ausiliaria.<sup>25</sup>

Infine, la coordinata  $\rho_{C_s}$  nel piano coordinato  $(0, \rho, x_3)$  vale

$$\rho_{C_s} = \frac{1}{2} \left[ \rho_{G_2} + \rho_{G_1} + \frac{2C}{f(\rho_{n_T})} \frac{(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})}{R_2 - R_1} \right].$$

Di conseguenza il centro  $C_s$  si trova, rispetto ad  $M$ , dalla parte opposta al punto in cui l'asse neutro interseca le basi della sezione della trave ausiliaria.<sup>26</sup>

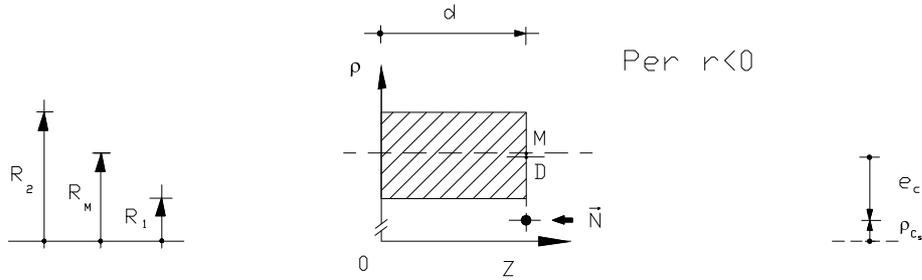


FIGURA 5. Caratteristica della sollecitazione esterna indotta dal carico specifico.

#### 4. Conclusioni

In definitiva, si può affermare che il carico specifico agente sulle basi della trave ausiliaria dà luogo globalmente, cioè in termini di caratteristica della sollecitazione esterna, ad uno sforzo normale eccentrico.

In particolare, siccome il piano meridiano è piano principale di tensione per ogni suo punto, esso oltre ad essere piano di sollecitazione sarà anche piano di flessione, per cui lo sforzo normale eccentrico darà luogo ad una *presso-flessione retta* se la caratteristica di distorsione  $r$  è oraria (negativa) e ad una *tenso-flessione retta* se  $r$  è antioraria (positiva).

<sup>25</sup> Ricordiamo a questo proposito che, quando l'asse neutro interseca la sezione retta di una trave, il centro di sollecitazione non appartiene alla sezione stessa [13, p. 145].

<sup>26</sup> Tale centro, rispetto al cilindro, si troverà nella zona cava, in prossimità dell'asse di simmetria (vedi figura 5).

Inoltre, posto  $R_2 - R_1 = \Delta R \rightarrow 0$ , cioè, per spessori molto piccoli del cilindro, la sollecitazione tenderà ad una flessione retta semplice intorno all'asse neutro, che tende a passare per  $M$  quando  $C_s$ , spostandosi verso l'asse del cilindro, tende a  $\infty$ .

In definitiva si è mostrato che nel caso della sesta distorsione elementare la distribuzione specifica del carico sulle basi della trave ausiliaria corrisponde (nell'ambito della teoria del Saint Venant) a una tenso-flessione o a una presso-flessione entrambe rette. Pertanto nel caso del concio di cilindro considerato è possibile calcolare lo stato tensionale in ogni sezione assiale con le ben note formule del Saint Venant [13, pp. 144–145], per distanze dalle basi superiori alla distanza di estinzione e per spessori abbastanza piccoli.<sup>27</sup>

### Ringraziamenti

Gli autori desiderano esprimere al professor G. Caricato la loro gratitudine per i preziosi suggerimenti ricevuti.

### Riferimenti bibliografici

- [1] V. Volterra, *L'équilibre des corps élastique multiplement connexes* (Imprimeur-libraire, Paris, 1907)
- [2] G. Grioli, "Le distorsioni elastiche e l'opera di Vito Volterra", *Atti dei Convegni Lincei*, **92**, 271 (1992)
- [3] G. Caricato, "On the Volterra's distortions theory", *Meccanica*, **35**, 411 (2000)
- [4] E. Laserra, and M. Pecoraro, "Volterra's Theory of Elastic Dislocations For A Transversally Isotropic Homogeneous Hollow Cylinder", *Nonlinear Oscillations*, **6**, 56 (2003)
- [5] C. Cattani, and J. Rushchitsky, "Volterra's distortions in nonlinear hyperelastic media", *Int. J. of Appl. Math. and Mech.*, **3**, 14 (2005)
- [6] A. Ascenzi, and A. Benvenuti, "Evidence of a state of initial stress in osteonic lamellae", *Journal of Biomechanics*, **10**, 447 (1997)
- [7] A. Ascenzi, *Skeletal research, an experimental approach. Microscopic dissection and isolation of bone constituents*, edited by Arthur S. Kunin, and David J. Simmons (Academic Press, 1983)
- [8] A. Ascenzi, "The osteonic lamellae as elastic bodies occupying a multiply-connected region of space and their problematic", *Atti dei Convegni Lincei*, **92**, 335 (1992)
- [9] M.G. Ascenzi, "A first estimation of prestress in so-called circularly fibered osteonic lamellae", *Journal of Biomechanics*, **32**, 935 (1999)
- [10] E. Laserra, and M. Pecoraro, "Volterra's dislocations as a model for osteonic lamellae", in *XI Int. Scient. Kravchuk Conf.* (Kiev, 2006)
- [11] M. Weingarten, "Sur les surfaces de discontinuité dans la théorie des corps solides", *Rend. Accad. Lincei*, **10**, 57 (1901)
- [12] A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica* (Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1953)
- [13] R. Sparacio, *Appunti delle lezioni del corso di scienza delle costruzioni* (Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Napoli, 1975)
- [14] A.E.H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge University Press, 1952)
- [15] A.I. Lurie, *Theory of elasticity* (Springer, Berlin, 2005)

---

<sup>27</sup> Tali da far tendere la distribuzione logaritmica del carico (2) a una distribuzione lineare (in tal caso il centro della coppia  $D$  tenderà al baricentro  $M$  della sezione).

---

[a] Ivana Bochicchio, Ettore Laserra  
Università degli Studi di Salerno  
Dipartimento di Matematica ed Informatica  
Via Ponte Don Melillo  
84084 Fisciano (SA), Italy  
\* **E-mail:** [elaserra@unisa.it](mailto:elaserra@unisa.it)

[b] Massimo Pecoraro  
Università degli Studi di Salerno  
Dipartimento di Ingegneria dell' Informazione e Matematica Applicata  
Via Ponte Don Melillo  
84084 Fisciano (SA), Italy

---

Presented: May 07, 2007  
Published on line: March 03, 2008